Vektorrechnung/Geometrie-Basics

Lineare Abhängigkeit

- Zwei Vektoren sind linear Abhängig, wenn sie parallel zueinander sind.
  Prüfen auf Parallelität zweier Vektoren:
  - Lineares Gleichungssystem aufstellen: $\vec{v}_1 = k \cdot \vec{v}_2$
    Wenn es für k eine Lösung gibt sind die Vektoren parallel/linear abhängig.
- Drei Vektoren sind linear Abhängig, wenn sie in einer Ebene liegen/komplanar sind.
  Prüfen, ob drei Vektoren in einer Ebene liegen:
  - Wenn $\lambda \cdot \vec{v}_1 + \mu \cdot \vec{v}_2 + v \cdot \vec{v}_3 = 0$ nur für λ = μ = v = 0 lösbar ist, sind die Vektoren linear unabhängig.
  - Wenn das Spatprodukt der drei Vektoren 0 ist, dann liegen sie in einer Ebene/sind linear abhängig.

Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist eine Zahl: $<\vec{a}, b> = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

Wenn das Skalarprodukt 0 ergibt, stehen die Vektoren senkrecht aufeinander/sind orthogonal.

Betrag/Länge eines Vektors

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Normierter Vektor/Einheitsvektor

Ein normierter Vektor ist ein Vektor mit der Länge 1.

Normierung eines Vektors: $\vec{n} = \vec{a} \cdot \frac{1}{|\vec{a}|} = \vec{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$

Kreuzprodukt/Vektorprodukt

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren ist der Vektor, der senkrecht zu diesen Vektoren steht (also wieder ein Vektor): $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$

Spatprodukt

Das Spatprodukt ist das Skalarprodukt aus dem Kreuzprodukt zweier Vektoren und einem dritten Vektor: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

Berechnung mit Determinante:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \cdot c_1 - b_3 \cdot c_2 \cdot a_1 - c_3 \cdot a_2 \cdot b_1$$

Volumenberechnung: $V_{Spat} = |(\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}))|$; $V_{Tetraeder} = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}))|$; $V_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot |(\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}))|$

Winkel zwischen zwei Vektoren

$$\arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

Schreibweisen für Geraden

Punkt-Richtungsform: $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$ $\qquad \lambda \in \mathbb{R}$

Schreibweisen für Ebenen

Punkt-Richtungsform: $E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$ $\qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Normalenform: $E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$; $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ (Normalenvektor)

Koordinatenform: $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0\ ;\ \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (Normalenvektor)

Spurpunkte von Geraden

Spurpunkte sind die Schnittpunkte einer Geraden mit den Koordinatenebenen.
Zur Berechnung der Spurpunkte mit z. B. der $x_1 x_2 - Ebene$ muss x_3 null gesetzt werden.

Untersuchen der Lagebeziehung zwischen Ebene und Gerade

Lineares Gleichungssystem aufstellen: $g = E$
Order: Liegt Ebene in Koordinatenform vor, kann g in E eingesetzt werden.

- Es gibt eine Lösung: g und E schneiden sich (Schnittpunkt kann durch Einsetzen von λ in g bestimmt werden)
- Es gibt keine Lösung: g ist parallel zu E
- Es gibt unendlich viele Lösungen: g liegt in E

Bestimmen des Schnittwinkels: $\arcsin\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}\right)$

Senkrechte Projektion einer Geraden in einer Ebene und Spiegelung einer Geraden an einer Ebene

- Berechnung des Schnittpunktes S zwischen Gerade und Ebene
- Berechnung des Lotes auf E durch Punkt auf Geraden
- Berechnung des Lotfußpunktes P_L (Schnittpunkt zwischen Lot und Ebene)
- Berechnung des Spiegelpunktes P_S: $\vec{OP_S} = \vec{OP} + 2 \cdot \vec{PP_L}$

Senkrechte Projektion kann nun berechnet werden: $\overline{g}: \vec{x} = \vec{OS} + \lambda \cdot \vec{P_L S} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Spiegelgerade kann nun berechnet werden: $g': \vec{x} = \vec{OP_S} + \mu \cdot \vec{P_S S} \quad \mu \in \mathbb{R}$

Lage von Ebenen im Koordinatensystem

- Ursprungsebene: d = 0, z. B.: $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0\ ;\ (0\ ;\ 0\ ;\ 0) \in E$
- Parallel zur Koordinatenachse: a, b, c oder d = 0, z. B.: $E: bx_2 + cx_3 + d = 0\ ;\ E \| x_1 - Achse$
- Parallel zur Koordinatenebene: a und b bzw. a und c bzw. b und c sind null, z. B.: $E: cx_3 + d = 0\ ;\ E \| x_{1-2} - Ebene$

Untersuchen der Lagebeziehung zwischen zwei Ebenen

- Ebenen sind parallel: $\vec{n}_{E_1} \| \vec{n}_{E_2}$
- Ebenen sind identisch: $E_1 = k \cdot E_2$
- Ebenen schneiden sich:
  - Beide Ebenen sind in Koordinatenform: Gleichsetzen, unterbestimmtes Gleichungssystem lösen, indem eine Koordinate auf Parameter festgelegt wird
  - Eine Ebene ist in Koordinatenform, eine in Parameterform: Ebene in Parameterform kann in Ebene in Koordinatenform eingesetzt werden, Gleichung nach einen Parameter auflösen, Ergebnis kann in Ebenengleichung eingesetzt werden
  - Beide Ebenen sind in Parameterform: Gleichsetzen der Ebenen, Gleichungssystem lösen, Ergebnis kann in Ebenengleichung eingesetzt werden

Berechnung des Schnittwinkels: $\arccos\left(\frac{|(\vec{n}_{E_1} \cdot \vec{n}_{E_2})|}{|(\vec{n}_{E_1})| \cdot |(\vec{n}_{E_2})|}\right)$

Abstand zwischen Gerade und Punkt

- Berechnung über Lotfußpunkt, der durch Aufstellen einer Hilfsebene mit dem Richtungsvektor der Geraden als Normalenvektor durch den Punkt und Schneiden dieser mit der Gerade ermittelt werden kann.
- $d = \frac{|(\vec{AP} \times \vec{u})|}{|(\vec{u})|}$