Zusammenfassung: Mathe 2

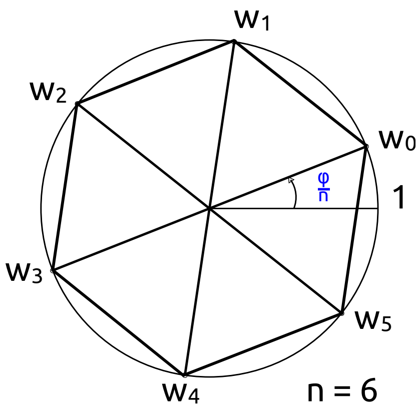
Formeln zu komplexen Zahlen

Schreibweisen:

$$z = x + yi = \underbrace{r \cdot e^{i \cdot \varphi}}_{\text{Polarform}} = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}\,; \quad \varphi = \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \text{ für } y \geq 0\,; \quad \varphi = -\arccos\left(\frac{x}{r}\right) \text{ für } y < 0$$

Konjugation: $z = z + iy \Leftrightarrow \bar{z} = x - iy$
Ist z die komplexe Lösung einer Gleichung, ist auch $\bar{z}$ eine Lösung.



Addition: Die Vektoren addieren sich.

Multiplikation: Die Winkel addieren sich; die Beträge multiplizieren sich.
Multiplikation mit i: Linksrotation des Vektors um 90°;
$i^2 = -1$: 180°; $\sqrt{(i)} = i^{0.5}$: 45°

Potenzen: $i^n = i^{(n \bmod 4)}$; $\quad i^2 = -1\,; \quad i^3 = -i$

Division: Bruch mit konjugiert Komplexem des Nenners erweitern.

Quadrat: $z^n = r^n \cdot e^{i \cdot \varphi \cdot n}$

***n*-te Wurzeln** w_k für k = 0, 1, …, n – 1: $\quad w_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)}$

Lösen von Gleichungen

p-*q*-Formel zur Lösung von Gleichungen: $\quad z^2 + pz + q = 0 \;\Leftrightarrow\; z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Beispiel zur quadratischen Ergänzung:

$$x^2 - 8x + 3$$
$$(x-4)^2 - 16 + 3$$
$$(x-4)^2 - 13$$

Matrizen

Rechenregeln: $(A^T)^T = A\,,\ (A^{-1})^{-1} = A\,,\ (A \cdot B)^T = B^{-1} \cdot A^T\,,\ (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1,}$
$A^0 = E\,,\ A^{-p} = (A^{-1})^p\,,\ A^{p+q} = A^p \cdot A^q$

Rechenregeln (Determinanten): $|A^T| = |A|, \quad |A \cdot B| = |A| \cdot |B|, \quad |A^{-1} \cdot A| = |E| = 1 \Leftrightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

Multiplikation: „Zeile mal Spalte“ (*nicht* kommutativ)

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 + cz_1 & dx_1 + ey_1 + fz_1 & gx_1 + hy_1 + iz_1 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 & dx_2 + ey_2 + fz_2 & gx_2 + hy_2 + iz_2 \\ ax_3 + by_3 + cz_3 & dx_3 + ey_3 + fz_3 & gx_3 + hy_3 + iz_3 \end{pmatrix}$$

Anzahl der Spalten von *A* muss gleich der Anzahl der Zeilen von *B* sein: *A*: *m* x $\underline{n}$, *B*: $\underline{n}$ x r, *C*: *m* x *r*

Rang: Rg *M* = Anzahl der Linear unabhängigen Zeilen- bzw. Spaltenvektoren der Matrix
Entspricht Rg einer quadratischen Matrix ihrer Zeilen- bzw. Spaltenzahl, wird sie **reguläre** Matrix genannt, ansonsten **singuläre** Matrix. Nur für reguläre Matrizen

existiert eine inverse Matrix. Bei singulären Matrizen ist die Determinante 0.

Einheitsmatrix E: Hauptdiagonalelemente 1, Außerdiagonalelemente 0, quadratisch

Transponierte Matrix A^T: Zeilen und Spalten vertauscht

Inverse Matrix A^{-1}: ergibt mit ursprünglichen Matrix multipliziert die Einheitsmatrix

Determinante: für Beispiel siehe „Eigenwerte und Eigenvektoren"

Lineare Abbildungen

Bsp. Abbildungsmatrix für Achsenspiegelung an x_1-Achse: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Abbildugsmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$

Bsp. Abbildungsmatrix für Normalprojektion ($\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$): $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Eigenwerte und Eigenvektoren

$\vec{y} = A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$ $\qquad \lambda$: Eigenwert von A , $\quad \vec{x}$: Eigenvektor von A $(\vec{x} \neq 0)$

Beispiel: Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$ (zeigt auch das Berechnen von Determinanten)

Eigenwerte: Nullstellen des charakteristischen Polynoms $det(A - \lambda \cdot E) = 0$ berechnen

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 4 & -8 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \underbrace{-\lambda \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4 & -8 & 5-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{matrix}}_{\text{Nach 1. Spalte aufgelöst}} = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1-2\lambda & \frac{\lambda}{4}(5-\lambda) \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4 & -8 & 5-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{(I')} = \text{(I)} + \frac{\lambda}{4}\text{(III)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{matrix}$$

$$= \underbrace{-\lambda \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1-2\lambda & \frac{\lambda}{4}(5-\lambda) \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix}}_{\text{Nach 3. Zeile aufgelöst}} = -\lambda \cdot 4\left((1-2\lambda) - (-\lambda)\left(\frac{\lambda}{4}(5-\lambda)\right)\right) = \lambda(\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4) = 0$$

→ Eigenwerte durch Raten, Polynomdivision, p-q-Formpel: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_{3/4} = 2$

Eigenvektoren: für jeden Eigenwert homogenes LGS $(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{x} = 0$ lösen

z. B. für $\lambda = 2$: $\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 5-2 & 0 \end{array}\right)$ $\rightarrow x_4 = 2x_3 = 4x_2 = 8x_1 \rightarrow x_1 = \alpha \rightarrow \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \ (\alpha \neq 0)$

Folgen und Reihen

Folge: Liste von Zahlen (Glieder der Folge)
Reihe: Aufsummierung von Werten

Fixpunkt rekursiver Folgen: Wert, der beim Einsetzen in die Rekursion sich selbst zurück liefert; jeder Grenzwert ist Fixpunkt, aber nicht umgekehrt. Wenn Grenzwert existiert, kann dieser berechnet werden, indem man in der Formel a_n und a_{n+1} durch a ersetzt und dann nach a auflöst: $a_0 = 0, a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{10} \rightarrow a = \frac{a+1}{10} \Leftrightarrow a = \frac{1}{9}$

Grenzwert von Folge: Wert, gegen den Folge konvergiert

Beispiele:

$$a_n=\overbrace{\sqrt{n^2+3n}-n}^{a-b=\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)}=\frac{a^2-b^2}{a+b}}=\frac{(n^2+3n)-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n}=\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}\rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{2}$$

$$b_n=\sqrt[n]{n}\rightarrow\lim_{n\to\infty}b_n=1 \qquad c_n=\frac{n-1}{n}=\frac{1-\frac{1}{n}}{1}\rightarrow\lim_{n\to\infty}c_n=1$$

Wert von konvergenter Reihe: Grenzwert der Folge der Teilsummen

Beispiele:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{2k}=\quad\underbrace{3\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k-1\right)}_{\text{geom. Reihe: }\sum_{k=0}^{\infty}x^k=1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}\text{ für}|x|<1}\quad=3\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1\right)=3$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k++1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}}_{A\cdot(k+1)+B\cdot k\Leftrightarrow A=1,B=-1}=\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}}_{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\ldots=1}=1$$

Vergleichskriterium

Für Folgen: a_n, b_n sind konvergent mit Grenzwert g

→ Grenzwert von c_n mit $a_n\leq c_n\leq b_n$ ist ebenfalls g

Bsp.: $\underbrace{\sqrt[n]{5}}_{\to 1}\leq\sqrt[n]{6+\sin(n^2)}\leq\underbrace{\sqrt[n]{7}}_{\to 1}$ → $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{6+\sin(n^2)}=1$

Für Reihen:

$\left.\begin{matrix}\sum b_k\text{ konvergiert}\\ |a_k|\leq b_k\end{matrix}\right\}\rightarrow\sum a_k$ auch konvergent (sogar absolut konvergent)

($\sum b_k$ ist konvergente Majorante)

$\left.\begin{matrix}\sum b_k\text{ divergiert}\\ 0\leq b_k\leq|a_k|\end{matrix}\right\}\rightarrow\sum a_k$ auch divergent

($\sum b_k$ ist divergente Minorante)

Quotientenkriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\ :\ \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|:=q$$

Wurzelkriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\ :\ \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}:=q$$

q < 1: Konvergenz
q > 1: Divergenz
q = 1: keine allg. Aussage (Randpunkte)

Beispiel: Quotientenkriterium

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\ :\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0\ \rightarrow\ \text{Konvergenz}$$

Leibnizkriterium (nur für alternierende Reihen!)

Wenn $a_0, a_1, a_2, \ldots$ monoton fallend gegen 0 geht, dann konvergiert

$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot a_k=a_0-a_1+a_2-a_3+\ldots$ für $a_k>0$.

Bsp.: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}=0$ → Konvergenz nach Leibniz

Potenzreihen $P(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cdot(x-x_0)^k$

x_0: Entwicklungspunkt, a_k: Koeffizienten, r: Konvergenzradius

$|x-x_0|<r$: Konvergenz
$|x-x_0|>r$: Divergenz
$x=x_0\pm r$: keine allg. Aussage (Randpunkte)

Beispiel: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-2)^n}{3^n\cdot\sqrt{n}}$: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(2x-2)^n}{3^n\cdot\sqrt{n}}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2x-2}{3}\right|\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt[2]{\sqrt[n]{n}}}}_{\to 1}=\underbrace{\left|\frac{2x-2}{3}\right|<1}_{\text{Bed. für Konvergenz}}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}$

→ Konvergenz: $\frac{-1}{2}<x<\frac{5}{2}$, Divergenz: $x<\frac{-1}{2}\vee x>\frac{5}{2}$

Randpunkte:
$x=\frac{5}{2}$: $a_n=\frac{3^n}{3^n\cdot\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$ → Divergenz, da $\sum\frac{1}{n^\alpha}=\infty$ für $\alpha\leq 1$
$x=\frac{-1}{2}$: $a_n=\frac{3^n}{(-3)^n\cdot\sqrt{n}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ → Konvergenz nach Leibniz

Canchy-Produkt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x}=(1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+x+x^2+x^3+\ldots)$$
$$=1+(x+x)+(x^2+xx\cdot x^2)+\ldots=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k=\frac{1}{(1-x)^2}$$

Ableitungsregeln und Ableitungen wichtiger Funktionen

$(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)$ $\quad$ $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$
$(x^n)'=n\cdot x^{(n-1)}$
$(f(x)\cdot g(x))'=f'\cdot g+f\cdot g'$ $\quad$ $(f\frac{(x)}{g}(x))'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$
$f(g(x))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$
$(\sin x)'=\cos x$ $\quad$ $(\cos x)'=-\sin x$ $\quad$ $(\tan x)'=\frac{1}{\cos(x)^2}=1+\tan(x)^2$
$(\cos(x)^3)'=3\cos(x)^2\cdot(-\sin(x))$ da $(Z^3)'=3\cdot Z^2\cdot Z'$
$(\sinh x)'=\cosh x$ $\quad$ $(\cosh x)'=\sinh x$ $\quad$ $(\tanh x)'=\frac{1}{\cosh}(x)^2=1+\tanh(x)^2$
$\arcsin(x)'=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ $\quad$ $\arccos(x)'=-\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$
$(\arctan x)'=\frac{1}{x^2+1}$ $\quad$ $(x-\arctan x)'=\frac{x^2}{x^2+1}$
$(x^x)'=x^x\cdot(1+\ln(x))$ $\quad$ $(\log_a(x))'=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln(x)}$
$(e^x)'=e^x$ $\quad$ $\ln(x)'=\frac{1}{x}$

siehe auch FS Kapitel 6.3 (S.134)

Integrieren

Rechenregeln, siehe auch FS Kapitel 7 (S. 137)

$\int_a^b c\cdot f(x)dx=c\cdot\int_a^b f(x)dx$ $\quad$ $\int_a^b(f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$
$\int_a^b f(x)dx=\int_a^d f(x)dx+\int_d^b f(x)dx$ $\quad$ $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$
$f(x)\leq g(x)$ → $\int_a^b f(x)dx<\int_a^b g(x)dx$

Stammfunktionen, siehe auch FS Kapitel 7.4 (S.149)

$k=(k\cdot x)'$ $\qquad$ $x^n=\begin{cases}\left(\frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}\right)' & \text{wenn } n\neq -1\\ (\ln|(x)|)' & \text{wenn } n=-1\end{cases}$

$e^x=(e^x)'$ $\qquad$ $e^{k\cdot x}=(\frac{1}{k}\cdot e^{k\cdot x})'$

$a^x\cdot\ln(a)\text{für } a>0=(a^x)'$ $\qquad$ $a^x=\left(\frac{a^x}{\ln(a)}\right)'$

$\ln(x)=(x\cdot\ln(x)-x)'$ $\qquad$ $\log_a x=(\frac{1}{\ln a}\cdot(x\ln(x)-x))'$

$\sqrt{(a^2-x^2)}=\left(\frac{a^2}{2}\cdot\arcsin(\frac{x}{a})+\frac{x}{2}\sqrt{(a^2-x^2)}\right)'$ $\qquad$ $\sqrt{(a^2+x^2)}=\left(\frac{a^2}{2}\cdot\text{arsinh}(\frac{x}{a})+\frac{x}{2}\sqrt{(a^2-x^2)}\right)'$

$\sin(x)=(-\cos(x))'$ $\qquad$ $\cos(x)=(\sin(x))'$ $\qquad$ $\sin^2(x)=(\frac{x-\sin x\cdot\cos x}{2})'$

$\cos^2(x)=(\frac{x+\sin x\cdot\cos x}{2})'$ $\qquad$ $\tan(x)=(-\ln|\cos(x)|)'$

Partielle Integration

Regel: $\int u'\cdot v\,dx=u\cdot v-\int u\cdot v'\,dx$

Beispiele:

$\int \underbrace{x}_{v}\cdot\underbrace{e^x}_{u'}dx=\underbrace{x}_{v}\cdot\underbrace{e^x}_{u}-\int \underbrace{1}_{v'}\cdot\underbrace{e^x}_{u}dx=x\,e^x-e^x+C$

$\int \underbrace{\cos(x)}_{u'}\cdot\underbrace{x^2}_{v}dx=\underbrace{\sin(x)}_{u}\cdot\underbrace{x^2}_{v}-\int \underbrace{\sin(x)}_{u}\cdot 2\underbrace{x}_{v'}\,dx$

$=x^2\cdot\sin(x)-(-\cos(x)\cdot 2x-\int -\cos(x)\cdot 2\,dx)=x^2\cdot\sin(x)+2x\cdot\cos(x)-2\sin(x)+C$

$\int_0^1\frac{1}{x}\cdot\ln x\,dx=\lim_{\lambda\to 0}[\ln x\cdot\ln x]_\lambda^1-\int_0^1\frac{1}{x}\cdot\ln x\,dx$

$\Leftrightarrow\int_0^1\frac{1}{x}\cdot\ln x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\lim_{\lambda\to 0}[\ln^2 x]_\lambda^1=\frac{1}{2}\cdot\lim_{\lambda\to 0}-\ln^2\lambda=-\infty$ $\rightarrow$ uneigentliches Integral divergiert

Integration durch Substitution

Regel.: $\int f(x)\,dx$ $\quad$ mit nervigem Term $h(x)$ $\quad\rightarrow\quad$ neue Variable: $t=h(x)$

Umkehrfunktionen: $x=h^{-1}(t)=g(t)$, $\quad \frac{dx}{dt}=g'(t)\Leftrightarrow dx=g'(t)\,dt$

$\int f(x)\,dx=f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$

Beispiel:

$\int_{x=0}^1\frac{x}{x^2+1}dx$ $\qquad$ neue Variable: $t=x^2+1$, $\qquad \frac{dt}{dx}=2x\Leftrightarrow dt=2x\,dx\Leftrightarrow\frac{1}{2}dt=x\,dx$

für $x\,dx$ einsetzen und Grenzen anpassen: $\int_{t=0^2+1=1}^{1^2+1=2}\frac{\frac{1}{2}}{t}dt=\left[\frac{1}{2}\ln|t|\right]_1^2=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 1=\frac{1}{2}\ln 2$

Verallgemeinerung von Beispiel: $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$

Uneigentliche Integrale

Beispiel: siehe Partielle Integration

Taylorreihe

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}\cdot(x-x_0)^3+\cdots$$

Bekannte Taylorreihen, siehe auch FS Kapitel 8.6 (S. 193)

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots \qquad \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots$$

$$\sin(x)=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots \qquad \cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$$

Bestimmung von Taylorreihe mithilfe bekannter Taylorreihe:

$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots-1}{x}=1+\frac{x}{2!}+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{(k+1)!}$$

Bestimmung von Grenzwert mithilfe bekannter Taylorreihen:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+x)}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^2}{2}+\ldots\right)^2}{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(1-\frac{x}{2}+\ldots\right)^2}{x^2\left(-\frac{1}{2!}+\frac{x^2}{4!}\right)}=\frac{1^2}{-\frac{1}{2}}=-2$$

Mehrdimensionale Differentialrechnung/Kurvendiskussion

Wiederholung zur eindimensionalen Kurvendiskussion:

$f(x)'>0$: monoton steigend $f(x)'<0$: monoton fallend $f(x)'=0$: stationärere Punkte*

*Vorzeichenwechsel von - zu + → Minimum; von + zu - → Maximum

$f(x)''>0$: linksgekrümmt $f(x)''<0$: rechtsgekrümmt $f(x)''=0$ und wechselt Vz: Wendepunkte

$f(x)'=f(x)''=0$ und $f(x)''$ wechselt Vz: Terassenpunkte

$f(x)=-f(-x)$: punktsymmetrisch zum Ursprung $f(x)=f(-x)$: achsensymmetrisch zur y-Achse

Partielle Ableitungen: $grad\, f(x,y)=\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$ (f_x ist f nach x Abgeleitet, f_y nach y)

Stationäre Punkte: $grad\, f(x,y)=0$ (Gleichungssystem)

Hessematrix: $H_f=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}=H_f^T$

Einordnung des stationären Punkts (x_0, y_0):

$D=det\, H_f(x_0,y_0)=f_{xx}(x_0,y_0)\cdot f_{yy}(x_0,y_0)-f_{xy}(x_0,y_0)^2$

- D > 0: $f_{xx}(x_0,y_0)>0$? lokales Minimum : lokales Maximum
- D < 0: Sattelpunkt
- D = 0: keine Aussage möglich

Tangentialebene: $T(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

Normalenvektor, Normaleneinheitsvektor: $\vec{n}=\begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{n}_e=\frac{1}{|\vec{n}|}\cdot\vec{n}$

Richtungsableitung an Punkt (x_0, y_0): $<grad\, f(x_0,y_0),\vec{r}>=f_x\cdot r_1-f_y\cdot r_2$

Voraussetzung: $|\vec{r}|=1$

Richtung mit maximaler Steigung an Punkt (x_0, y_0): Punkt in Gradient einsetzen und

diesen als Richtungsvektor verwenden
Richtung mit minimaler Steigung an Punkt (x_0, y_0) : Richtung mit max. Steigung mal -1

Integration mit mehreren Variablen: $B=\int_a^b \left(\int_c^d dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b dy \right) dx$

Differenzengleichungen

Beispiel (1) für inhomogene Differenzengleichung: $y_{n+2}-5\,y_{n+1}+6\,y_n=n\cdot 3^n \quad n\in\mathbb{N}_0$
Beispiel (2) für inhomogene Differenzengleichung mit Startwerten:
$y_{n+2}-5\,y_{n+1}-14\,y_n=10\cdot 7^{n+1}$ Startwerte: $y_0=2, y_1=0 \quad n\in\mathbb{N}_0$

1. Nullstellen des charakteristischen Polynoms für homogene Lösung:
   Beispiel 1: $\lambda^2-5\lambda+6=0 \Leftrightarrow \lambda_1=2, \lambda_2=3$
   → homogene Lösung: $\overset{\text{homogen}}{y}_n=c_1\cdot 2^n+c_2\cdot 3^n$
   „Ersatzlösung" bei mehrfachen Nullstellen: Faktor n^2 / n^3 / … ergänzen
2. partikuläre Lösung finden:
   Beispiel 1: $\underbrace{n}_{\text{Polynom:}\,n=0+1\cdot n\rightarrow \gamma_0+\gamma_1\cdot n} \cdot \underbrace{3^n}_{\text{Potenzfnk. mit Resonanz, da 3 Nst. d. charak. Polynoms}}$
   → Ansatz: $y_n=(\gamma_0+\gamma_1\cdot n)\cdot \underbrace{n}_{\text{wg. Resonanz}} \cdot 3^n=(\gamma_0\cdot n+\gamma_1\cdot n^2)\cdot 3^n$
   (Wenn 3 doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms wäre, müsste man n^2 im Ansatz verwenden.)
   Beispiel 2: $n^0\cdot 10\cdot 7^{n+1}$ → Ansatz: $y_n=\gamma\cdot 7^{n+1}=7\,\gamma\cdot 7^n$
   weiteres Beispiel: $n+1$ → Ansatz: $y_n=(\gamma_0+\gamma_1\cdot n)\cdot \underbrace{n}_{\text{wg. Resonanz (1 ist Nst. des charak. Polynoms)}} \cdot (1^n)$
3. Einsetzen in Rekursion:
   $y_n=(\gamma_0\cdot(n+2)+\gamma_1\cdot(n+2)^2)\cdot 3^{n+2}-5\cdot(\gamma_0\cdot(n+1)+\gamma_1\cdot(n+1)^2)\cdot 3^{n+1}+6\cdot(\gamma_0\cdot n+\gamma_1\cdot n^2)\cdot 3^n$
   $\Leftrightarrow \underbrace{6\,\gamma_1}_{=1}\cdot n+\underbrace{(3\,\gamma_0+21\,\gamma_1)}_{=0}=n \Leftrightarrow \gamma_1=\frac{1}{6}, \gamma_0=-\frac{7}{6}$
   (Für Umformung durch 3^n teilen, dann Aufteilen in Terme mit n^2, in Terme mit n und Terme ohne n.
   Am Ende zur Bestimmung der Gamma-Werte Teilterme gleich 1 bzw. 0 setzen.)
4. partikuläre Lösung: Lösungen aus 3. in Ansatz aus 2. einsetzen
   inhomogene Lösung: partikuläre Lösung + homogene Lösung
   Beispiel 1: $y_n=\left(-\frac{7}{6}\cdot n+\frac{1}{6}\cdot n^2\right)\cdot 3^n+c_1\cdot 2^n+c_2\cdot 3^n$ *Beispiel 2*: $y_n=7^n+c_1\cdot(-7)^n+c_2\cdot 2^n$
5. Wenn Startwerte y_0 und y_1 gegeben sind diese für n in Lösung aus 4. einsetzen.
   → c_1 und c_2 können durch Lösen dieses LGS bestimmt werden
   Beispiel 2: $\begin{array}{l} y_0=7^0+c_1\cdot(-7)^0+c_2\cdot 2^0=2 \quad \text{(I)} \\ y_1=7^1+c_1\cdot(-7)^1+c_2\cdot 2^1=0 \quad \text{(II)} \end{array} \rightarrow c_2=0, c_1=1 \rightarrow y_n=7^n+(-7)^n$

Wenn man komplexe Nullstellen wie beispielsweise $\lambda_{1/2}=1\pm i\sqrt{3}$ erhält, diese in Polarform umrechnen: $\lambda_{1/2}=1\pm i\sqrt{3}=2\cdot e^{\pm\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot i}$
→ Lösung: $y_n=c_1\cdot 2^n\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{3}\right)+c_2\cdot 2^n\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi}{3}\right)$